Architettura dei Calcolatori
Rappresentazione dell'informazione

Ing. dell'Automazione
A.A. 2011/12
Gabriele Cecchetti

Rappresentazione dell'informazione

- Sommario:
  - Numerazione posizionale
  - Conversione tra basi diverse
  - Aritmetica binaria
  - Numeri relativi
  - Numeri frazionari
  - Numeri in virgola mobile
- Riferimenti:
  - Hamacher "Introduzione all'architettura del Calcolatore", cap. 3, sez. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5
  - G. Bucci "Architetture e organizzazione dei Calcolatori Elettronici – Fondamenti", Cap. 2, tutte le sezioni eccetto 2.6.2 e 2.6.3

Cos'è un numero ? - Notazione posizionale

- Il ***NUMERO*** è un concetto astratto e corrisponde alla descrizione quantitativa degli oggetti contenuti in un dato insieme.
- Un **SISTEMA DI NUMERAZIONE** è un insieme di simboli e regole atti a rappresentare numeri.
- **Notazione posizionale**: permette di rappresentare un numero naturale qualsiasi (intero non negativo).

Sistema posizionale decimale

- La notazione decimale tradizionale è di tipo posizionale; esempio:

$$2718 = \mathbf{2} \times 10^3 + \mathbf{7} \times 10^2 + \mathbf{1} \times 10^1 + \mathbf{8} \times 10^0$$

Sistema posizionale

- In generale,
  - dato un numero **B** ≥ 2, detto **BASE**, e
  - dato l'insieme composto da B *simboli diversi* $\beta = \{0, \ldots, B-1\}$,
  - la stringa di n cifre:
    $\mathbf{b_{n-1}b_{n-2} \ldots b_1b_0}$ con b_i appartenente a β
  - si interpreta *come:*

$$\mathbf{b_{n-1} x\, B^{n-1} + b_{n-2} x\, B^{n-2} + \ldots + b_1 x\, B^1 + b_0 x\, B^0}$$

Esempi con basi diverse

- 217_8
- 36_{16}
- $2A_{16}$
- 1001_2

Basi più interessanti per i calcolatori

- Base 2 e base 16.

B=10	B=2	B=16
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10
17	10001	11
18	10010	12

Numeri binari naturali

- *Numeri binari naturali:* si utilizza un sistema di numerazione posizionale in base $B = 2$
- La sequenza di bit:

  $b_n\, b_{n-1} \ldots b_0$

  dove si ha $b_i = 0$ o 1, in base 2 rappresenta:

  $b_n \times 2^{n-1} + b_{n-1} \times 2^{n-2} + \ldots + b_0 \times 2^0$
- Esempi con $n = 8$:
  - $00000000_2 = 0_{10}$
  - $00001000_2 = 1 \times 2^3 = 8_{10}$
  - $00101011_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43_{10}$
  - $11111111_2 = \Sigma_{n = 1,2,3,4,5,6,7,8}\ 1 \times 2^{n-1} = 255_{10}$

Conversioni tra basi

- da base 2 a base 10
- da base 10 a base 2
- da base 2 a base 16
- da base 16 a base 2
- tra basi generiche

Conversione da base 2 a base 10

- Considerando la relazione:

  $\mathbf{b_{n-1} x\ B^{n-1} + b_{n-2} x\ B^{n-2} + \ldots + b_1 x\ B^1 + b_0 x\ B^0}$

  che nel caso di B=2 diviene:

  $\mathbf{b_{n-1} x\ 2^{n-1} + b_{n-2} x\ 2^{n-2} + \ldots + b_1 x\ 2^1 + b_0 x\ 2^0}$

  è sufficiente sommare le potenze corrispondenti alle cifre '1'. Esempio:

- *7 6 5 4 3 2 1 0*

  $01001101 = 2^6+2^3+2^2+2^0 = 64+8+4 = 77_{10}$

Conversione *rapida* da base 2 a base 10 (1/2)

- In binario si definisce una *notazione abbreviata*, sulla falsariga del sistema metrico-decimale:

  k $= 2^{10} = 1.024 \approx 10^3$ (kilo)

  M $= 2^{20} = 1.048.576 \approx 10^6$ (Mega)

  G $= 2^{30} = 1.073.741.824 \approx 10^9$ (Giga)

  T $= 2^{40} = 1.099.511.627.776 \approx 10^{12}$ (Tera)

- Attenzione: K, M, G e T in base 2 abbiano valori molto prossimi ai corrispondenti simboli del sistema metrico-decimale (sistema MKS).
- L'errore risulta $< 10\ \%$ (vedi come la 2^a cifra sia $= 0$).

Conversione rapida da base 2 a base 10 (2/2)

- Diventa molto facile e quindi *rapido* calcolare il valore *decimale approssimato* delle *potenze di* 2, anche se hanno esponente grande.
- Infatti è sufficiente:
  - *tenere a mente* l'elenco dei valori esatti delle prime dieci potenze di 2:
    $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$,
    $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$;
  - e *scomporre* in modo *additivo* l'esponente in contributi di valore 10, 20, 30 o 40, "leggendoli" come successioni di simboli K, M, G oppure T.

Esempio:

$2^{17} = 2^{7+10} = 2^7 \times 2^{10} = 128$ K

che può essere letto "128 mila"

in realtà, $2^{17} = 131.072$, errore $= 1 - 128.000/131.072 \approx 2{,}3\%$

Conversione da base 10 a base 2 (1/3)

- In generale,
  - per convertire un numero decimale **N**
  - in un numero binario (**B** = 2)
  - occorre trovare la stringa di n cifre binarie:
    $\mathbf{b_{n-1}b_{n-2} \ldots b_1b_0}$
  - tale che
    $\mathbf{N = b_{n-1}x\ 2^{n-1} + b_{n-2}x\ 2^{n-2} + \ldots + b_1x\ 2^1 + b_0x\ 2^0}$

Conversione da base 10 a base 2 (2/3)

$N/2 = b_{n-1}x2^{n-2} + b_{n-2}x2^{n-3} + \ldots + b_1x2^0, \qquad R_0=b_0$

$(b_{n-1}x2^{n-2} + b_{n-2}x2^{n-3} + \ldots + b_1x2^0)/2 =$
$b_{n-1}x2^{n-3} + b_{n-2}x2^{n-4} + \ldots + b_2x2^0, \qquad R_1=b_1$

…

la ricerca dei coefficienti b-i richiede che si prosegua il procedimento fino a che il quoziente ottenuto non è più divisibile. Alla fine: $\mathbf{Q=b_{n-1}}$ e $\mathbf{R_{n-2}=b_{n-2}}$

La rappresentazione binaria si ottiene scrivendo da sn. verso dx. **i resti in ordine inverso** a quello secondo cui sono stati prodotti.

Conversione da base 10 a base 2 (3/3)

In pratica:

1. **decidere se il numero sia pari (resto 0) oppure dispari (resto 1), e annotare il resto**
2. **dimezzare il numero** (trascurando il resto)
3. **ripartire da (1) fino a ottenere 1 oppure 0**

si calcolano i resti delle divisioni per due

```
19 : 2 →  1
 9 : 2 →  1
 4 : 2 →  0
 2 : 2 →  0
   Q →  1
```

$19_{10} = 10011_2$

Esempio di convers. da base 10 a base 2

35_{10}→

35/2=17, **R_0=1;**

17/2=8, **R_1=1;**

8/2=4, **R_2=0;**

4/2=2, **R_3=0;**

2/2=**1=Q**, **R_4=0** *(1 non è più divisibile per 2)*

→ **100011_2**

Conversione da binario ad esadecimale

- Si scompone il numero binario in gruppi di 4 bit e si traduce ogni gruppo nella corrispondente cifra esadecimale.

  Esempio:

  `1100 0011 0101` → $C35_{16}$

Base 8 (*ottale*)

- Si usano solo le cifre 0-7 (scartando 8 e 9)
  - per esempio:

    $534_{oct} = 5 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 348_{10}$

Base 16 (*esadecimale*)

- Si usano le cifre 0-9 e le lettere A-F (ponendo: A = 10, B = 11, …, F = 15)
  - per esempio:

$B7F_{hex} = B \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 15 \times 16^0 =$

$= 11 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 2943_{10}$

Conversione da tra esadecimale e binario

- Si traduce ogni cifra esadecimale nella corrispondente codifica binaria.

Esempio: considerato il numero $A03B_{16}$ traducendo ogni sua cifra in binario:

- A = 1010
- 0 = 0000
- 3 = 0011
- B = 1011

Quindi:

$A03B_{16} \rightarrow 1010\ 0000\ 0011\ 1011$

Esempi di conversione esadec./binario

- Conversione: $0100111101010110 11_2$ in hex

$0001_2 \quad 0011_2 \; 1101_2 \; 0101_2 \; 1011_2 =$

$= 1_{dec} \quad 3_{dec} \quad 13_{dec} \quad 5_{dec} \quad 11_{dec} =$

$= 1_{hex} \quad 3_{hex} \quad D_{hex} \quad 5_{hex} \quad B_{hex} =$

$= 13D5B_{hex}$

- Conversione: $A7B40C_{hex}$ in binario

$A_{hex} \quad 7_{hex} \quad B_{hex} \quad 4_{hex} \quad 0_{hex} \quad C_{hex} =$

$= 10_{dec} \quad 7_{dec} \quad 11_{dec} \quad 4_{dec} \quad 0_{dec} \quad 12_{dec} =$

$= 1010_2 \quad 0111_2 \; 1011_2 \; 0100_2 \; 0000_2 \; 1100_2 =$

$= 101001111011010000001100_2$

Conversione tra base B^k e base B

- Esercizio

Aritmetica binaria dei numeri naturali

- Aumento
- Riduzione
- Somma
- Sottrazione
- Moltiplicazione
- Divisione

Aumento e riduzione di bit

- *Aumento* dei bit: **premettendo in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta**. Esempio:

  4_{10} = **100** = **0100** = **00100** = …

  5_{10} = **101** = **0101** = **00101** = …

- *Riduzione* dei bit: **cancellando in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta**, *ma bisogna arrestarsi quando si trova un bit* 1! Esempio:

  7_{10} = **000111** = **00111** = **0111** = **111** **STOP!**

  2_{10} = **0010** = **010** = **10** **STOP!**

Aritmetica binaria: somma numeri naturali

- **Tabella della somma:**
  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 0 = 1
  - 1 + 1 = 0 e riporto di 1

- Esempio: 1010+111

```
  11
  1010+
   111
-----
10001
```

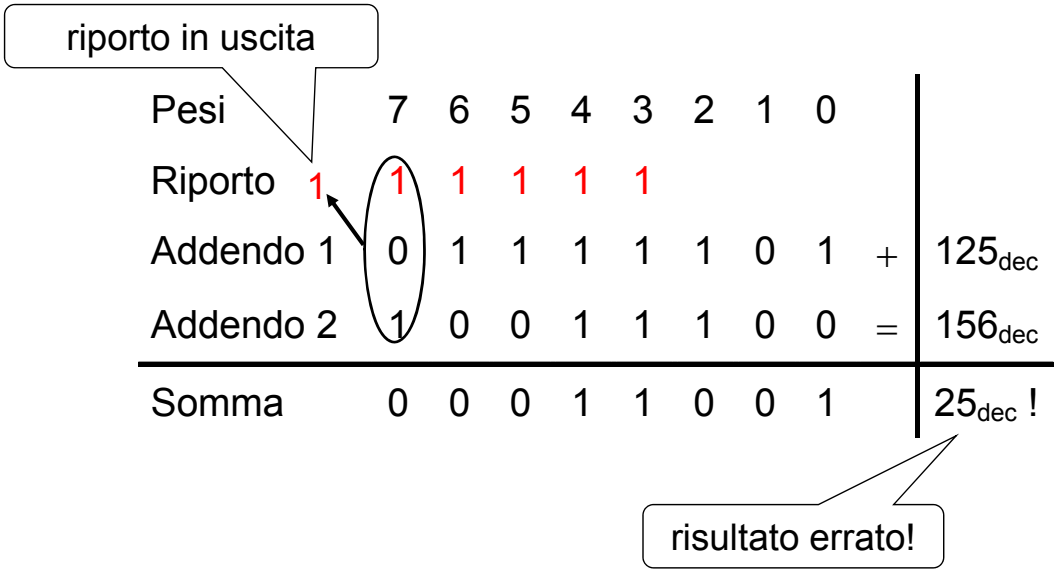

Aritmetica binaria: algoritmo di somma numeri naturali

Si usa l'algoritmo chiamato *"addizione a propagazione del riporto";* esso è l'algoritmo elementare decimale, adattato però alla base 2. Esempio per n=8:

Pesi	7	6	5	4	3	2	1	0		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	156_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		233_{dec}

Aritmetica binaria: algoritmo di somma numeri naturali

- Addizione con riporto in uscita (*carry out*)



Aritmetica binaria: sottrazione numeri naturali

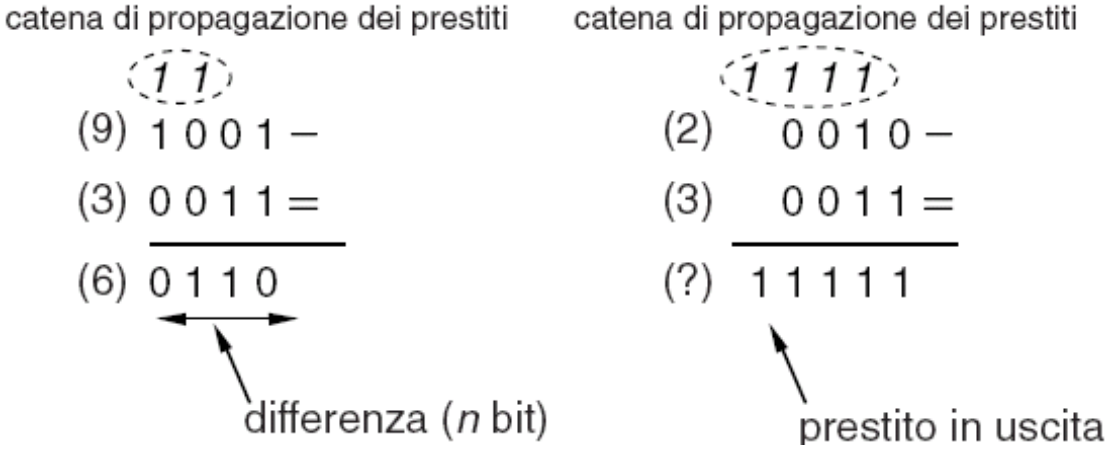
- **Tabella della sottrazione:**
  - 0 - 0 = 0
  - 0 - 1 = 1 e prestito di 1
  - 1 - 0 = 1
  - 1 - 1 = 0

- Esempio: 1010-111

```
  11
1010-
 111
-----
0011
```

Aritmetica binaria: algoritmo di sottrazione dei numeri naturali

L'algoritmo è quello manuale, con propagazione dei prestiti: *la sottrazione naturale è possibile solo se il minuendo è maggiore del o uguale al sottraendo*.



Aritmetica binaria: moltiplicazione numeri naturali

- **Tabella della moltiplicazione:**
  - 0 x 0 = 0
  - 0 x 1 = 0
  - 1 x 0 = 0
  - 1 x 1 = 1

- Esempio: 1010x111

```
    1010x
     111
    -----
    1010+
   1010 +
  1010
--------
1000110
```

Aritmetica binaria: divisione

- **Tabella della divisione:**
  - 0 : 1 = 0
  - 1 : 1 = 1
- Esempio: 1100:11

```
1100:11
 000|100
  00|
   0|
```

- Esempio: 10101:11

```
10101:11
 100
  011
    0
```


Numeri relativi

- In un calcolatore i numeri sono rappresentati in gruppi di bit o parole (es. 8, 16, 32, …)
- Sia $\mathbf{B = b_{n-1}b_{n-2} \ldots b_1b_0}$ con b_i appartenente a $\beta = \{0,1\}$
- B rappresenta 2^n numeri interi **positivi**: $0 < B < 2^{n-1}-1$
- Stabiliamo una convenzione:
  - **se MSB = 1 → B < 0**
  - **se MSB = 0 → B ≥ 0**, ove MSB (*Most Significative Bit*) = b_{n-1}

Numeri relativi: rappresentazioni

- Esistono tre rappresentazioni principali:
  - **Modulo e segno**
  - **Rappresentazione in complemento a 1**
  - **Rappresentazione in complemento a 2**

Rappresentazione modulo e segno (1/3)

- Sia *n* il numero di bit di una parola:
  $-(2^{n-1}+1) < B < 2^{n-1}-1$

  Numeri negativi (B < 0) : da -0 a $-(2^{n-1}+1)$
  Numeri positivi (B > 0) : da 0 a $2^{n-1}-1$

Nota.

Il numero 0 esiste sia come +0 che come -0.

Rappresentazione modulo e segno (2/3)

- ***Numeri binari interi*** (positivi e negativi) ***in modulo e segno***:
  - il primo bit (quello a sinistra) rappresenta il segno del numero,
    - 0 per segno positivo
    - 1 per segno negativo
  - mentre i bit rimanenti ne rappresentano il valore assoluto

- Esempio per una parola di n=4 bit:

  $5_{10} \rightarrow 0101_2$

  $-5_{10} \rightarrow 1101_2$

Rappresentazione modulo e segno (3/3)

Osservazioni:

- Il bit di segno è *applicato* al numero rappresentato, ma non fa propriamente *parte* del numero in quanto tale, perché il bit di segno non ha significato numerico.
- *Distaccando il bit di segno*, i bit rimanenti rappresentano il valore assoluto del numero.

Rappresentazione in complemento a 1

- Sia *n* il numero di bit di una parola:
  $-(2^{n-1}+1) < B < 2^{n-1}-1$

  Numeri negativi (B < 0): da -0 a $-(2^{n-1}+1)$
  Numeri positivi (B>0): da 0 a $2^{n-1}-1$

- Il cambiamento di segno si ottiene ***complementando*** ciascun bit.

- Esempio per n=4 bit:
  $5_{10} \rightarrow 0101_2$
  $-5_{10} \rightarrow 1010_2$

Rappresentazione in complemento a 2 (1/2)

- Sia *n* il numero di bit di una parola:
  $-2^{n-1} < B < 2^{n-1}-1$

  Numeri negativi (B < 0): da -1 a -2^{n-1}
  Numeri positivi (B>0): da 0 a $2^{n-1}-1$

- Il cambiamento di segno si ottiene ***complementando*** a 1 e quindi ***sommando*** 1 al numero ottenuto.

- Esempio per n=4 bit:
  $5_{10} \rightarrow 0101_2$
  $-5_{10} \rightarrow 1010_2 + 0001_2 = 1011_2$

Rappresentazione in complemento a 2 (2/2)

- Nella rappresentazione in complemento a 2 (C_2) il bit il più significativo ha *peso negativo*, mentre tutti gli altri bit hanno peso positivo.

- La sequenza di bit:

$$\mathbf{b_{n-1}\, b_{n-2}\ \ldots\ b_0}$$

rappresenta in C_2 il valore:

$$-\mathbf{b_{n-1}} \times \mathbf{2^{n-1}} + \mathbf{b_{n-2}} \times \mathbf{2^{n-2}} + \ldots + \mathbf{b_0} \times \mathbf{2^0}$$

- Il bit più a sinistra viene chiamato *bit di segno*.

Esempio: numero a 3 bit in complemento a 2

- $000_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = 0_{10}$
- $001_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 1_{10}$
- $010_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = 2_{10}$
- $011_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2 + 1 = 3_{10}$
- $100_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = -4_{10}$
- $101_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = -4 + 1 = -3_{10}$
- $110_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = -4 + 2 = -2_{10}$
- $111_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = -4 + 2 + 1 = -1_{10}$

Invertire un numero in Complemento a 2

- L'*inverso additivo* (od *opposto*) di un numero rappresentato in C_2 si ottiene:
  - invertendo (negando) ogni bit del numero
  - addizionando 1 nella posizione meno significativa
- Esempio per n=5:

01011_{C2} $= 1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0 = 8+2+1 = 11_{10}$

$10100 + 1$ $= 10101_{C2} = -1\times2^4+1\times2^2+1\times2^0 =$

$= -16+4+1 = -11_{10}$

Conversione da Decimale a C_2

- Se $D_{dec} \geq 0$:
  - converti D_{10} in binario naturale
  - premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta
  - esempio: $154_{10} \Rightarrow 10011010_2 \Rightarrow 010011010_{C2}$
- Se $D_{10} < 0$:
  - trascura il segno e converti D_{10} in binario naturale
  - premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta
  - calcola l'opposto del numero così ottenuto, secondo la procedura di inversione in C_2
  - esempio: $-154_{10} \Rightarrow 154_{10} \Rightarrow 10011010_2 \Rightarrow$
    $\Rightarrow 010011010_2 \Rightarrow 101100101 + 1 \Rightarrow 101100110_{C2}$
- Occorrono 9 bit sia per 154_{10} sia per -154_{10}

Aumento e Riduzione dei Bit in C_2

- *Estensione* del segno: *replicando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta. Per esempio:

  4 = 0100 = 00100 = 000100 = … (indefinitamente)

  –5 = 1011 = 11011 = 111011 = … (indefinitamente)

- *Contrazione* del segno: *cancellando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta, *purché così facendo il bit di segno non abbia a invertirsi* ! Per esempio:

  7 = 000111 = 00111 = 0111 STOP! (111 è < 0)

  –3 = 111101 = 11101 = 1101 = 101 STOP! (01 è > 0)

Osservazioni

- *Il segno è incorporato nel numero rappresentato in C_2*, non è semplicemente *applicato* (come in segno e valore assoluto).
- *Il bit più significativo rivela il segno*: 0 per numero positivo, 1 per numero negativo (il numero zero è considerato positivo), ma …
- NON si può *distaccare* il bit più significativo e dire che i bit rimanenti rappresentino il puro valore, senza segno, del numero (ciò è vero solo se il numero è positivo) !

Riepilogo rappresentazione interi su 4 bit

Dec.	Segno e modulo	Compl. a 1	Compl. a 2
7	0111	0111	0111
6	0110	0110	0110
5	0101	0101	0101
4	0100	0100	0100
3	0011	0011	0011
2	0010	0010	0010
1	0001	0001	0001
0	0000	0000	0000

Dec.	Segno e modulo	Compl. a 1	Compl. a 2
-0	1000	1111	-
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	-	-	1000

Confronto tra Rappresentazioni

B				valore rappresentato			
b_3	b_2	b_1	b_0	**naturale**	**segno e val. ass.**	**comp. a 1**	**comp. a 2**
0	1	1	1	+7	+7	+7	+7
0	1	1	0	+6	+6	+6	+6
0	1	0	1	+5	+5	+5	+5
0	1	0	0	+4	+4	+4	+4
0	0	1	1	+3	+3	+3	+3
0	0	1	0	+2	+2	+2	+2
0	0	0	1	+1	+1	+1	+1
0	0	0	0	+0	+0	+0	+0
1	0	0	0	+8	−0	−7	−8
1	0	0	1	+9	−1	−6	−7
1	0	1	0	+10	−2	−5	−6
1	0	1	1	+11	−3	−4	−5
1	1	0	0	+12	−4	−3	−4
1	1	0	1	+13	−5	−2	−3
1	1	1	0	+14	−6	−1	−2
1	1	1	1	+15	−7	−0	−1

Esempio di addizione algebrica in complemento a 2

- L'algoritmo è *identico* a quello naturale! (come se il bit di segno non fosse negativo)

Pesi	7	6	5	4	3	2	1	0		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	-100_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		-23_{dec}

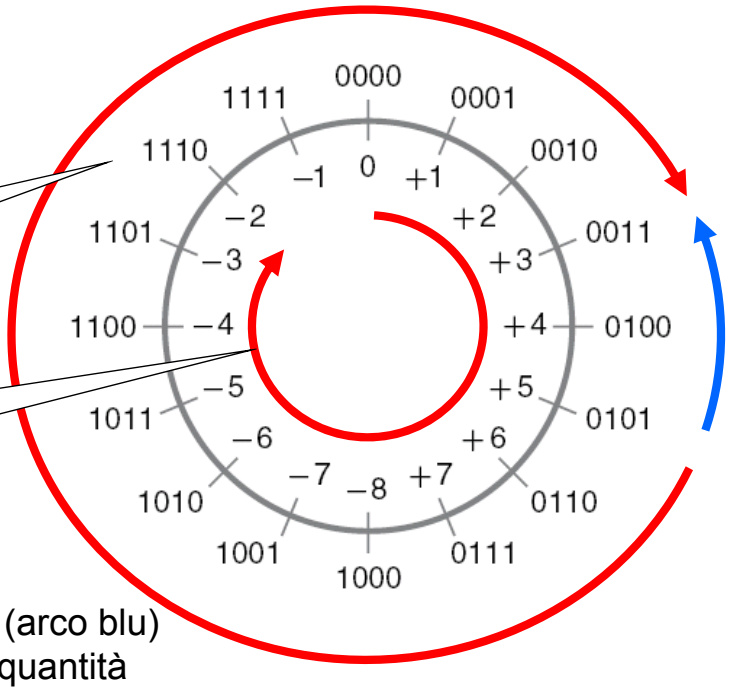
Come funziona l'addizione algebrica in C_2

struttura della rappresentazione (per $n = 4$)

14 (in naturale)

+

identico ad arco rosso esterno



−

sottrarre da 5 la quantità 2 (arco blu) è come addizionare a 5 la quantità 16 − 2 = 14 (arco rosso esterno), trascurando il riporto in uscita

Overflow nell'addizione in C_2

Pesi	7	6	5	4	3	2	1	0		
Riporto	1		1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	0	1	0	1	1	1	0	0	=	92_{dec}
Somma	1	0	1	0	1	0	0	1		-87_{dec} !

trabocco (overflow)
risultato negativo!

risultato errato!

addizione algebrica con trabocco

Come rilevare *l'overflow* in C_2

- *Quando gli addendi sono discordi* (cioè di segno diverso) *non si verifica mai trabocco*:
  - il valore assoluto della differenza è sempre minore del valore assoluto del minuendo o del sottraendo !
- *Quando gli addendi sono concordi* (di segno uguale), *si verifica trabocco se e solo se il segno del risultato non concorda con quello degli addendi*, cioè se si hanno:
  - addendi positivi ma risultato negativo
  - addendi negativi ma risultato positivo

Sottrazione algebrica in C_2

- **Per sottrarre in complemento a due, basta prima invertire (in C_2) il sottraendo, e poi addizionare.**
- Salvo il verificarsi di trabocco, la sottrazione in C_2 non ha restrizioni.
- *In effetti, in C_2 addizione e sottrazione si possono riguardare essenzialmente come la medesima operazione: addizione algebr*ica.
- È uno dei motivi (forse il principale) che fanno del complemento a due la tecnica di rappresentazione preferita nel calcolatore.

Esempio sottrazione usando il C_2 (caso 1)

- n=8, 30 - 22

$30_{10} \rightarrow 00011110_2$

$22_{10} \rightarrow 00010110_2$, trasformo 22 in compl. a 2:

$-22_{10} \rightarrow 11101001_2+1 = 11101010_2$

Ora sommo a 30 il -22 così ottenuto:

$30_{10} \rightarrow 00011110_2+$

$-22_{10} \rightarrow 11101010_2=$

---

*1*00001000

↑ c'è riporto! → **il risultato è positivo**.

Esempio sottrazione usando il C_2 (caso 2)

- n=8, 19 - 22

$19_{10} \rightarrow 00010011_2$

$22_{10} \rightarrow 00010110_2$, trasformo 22 in compl. a 2:

$-22_{10} \rightarrow 11101001_2 + 1 = 11101010_2$

Ora sommo a 19 il -22 così ottenuto:

$19_{10} \rightarrow 00010011_2 +$

$-22_{10} \rightarrow 11101010_2 =$

$\_11111101 = -3_{10}$

↑ non c'è riporto! → **Il risultato è negativo**.

Esempi vari di addizione algebrica in C_2

0 0 1 0 +	(+2)		0 1 0 0 +	(+4)	
0 0 1 1 =	(+3)		1 0 1 0 =	(−6)	
0 1 0 1	(+5)		1 1 1 0	(−2)	
1 0 1 1 +	(−5)		0 1 1 1 +	(+7)	
1 1 1 0 =	(−2)		1 1 0 1 =	(−3)	
1 0 0 1	(7)		0 1 0 0	(+4)	
1 1 0 1 −	(−3)		1 1 0 1 +		
1 0 0 1 =	(−7)	⇒	0 1 1 1 =		
			0 1 0 0	(+4)	
0 0 1 0 −	(+2)		0 0 1 0 +		
0 1 0 0 =	(+4)	⇒	1 1 0 0 =		
			1 1 1 0	(−2)	

Osservazioni sulla rappresentazione in C_2

- La tecnica di rappresentazione in complemento a due oggi è quella più usata nel calcolatore.
- Rispetto alle altre due (naturale e segno-valore assoluto), è un buon compromesso tra:
  - semplicità di definizione
  - capacità di rappresentare i numeri
  - ed efficienza delle operazioni

Osservazioni sulle operazioni in C_2

- Esistono algoritmi (e circuiti digitali) per calcolare anche moltiplicazione, divisione (intera), resto e quoziente, ecc.
- Le stesse operazioni di addizione e sottrazione ammettono svariati altri algoritmi (oltre a quello a propagazione di riporto o prestito), talvolta molto raffinati ed efficienti.
- L'aritmetica del calcolatore è una scienza importante (e difficile), cui il calcolatore ha dato un impulso decisivo negli ultimi 60 o 70 anni.

Numeri razionali

- Rappresentazione in virgola fissa
- Rappresentazione in virgola mobile (standard IEEE-754)

Numeri frazionari in virgola fissa

- La rappresentazione in *virgola fissa* si basa sull'idea di suddividere la sequenza di bit rappresentante il numero frazionario in due parti di lunghezza prefissata (ma non necessariamente uguale): *parte intera e frazionaria*.
- Il numero di bit a sinistra e destra della virgola è stabilito a priori, anche se alcuni bit restano nulli.

Numeri frazionari: da binario a decimale

- La stringa: **,$b_{-1}b_{-2}$ … b_{-m}** si interpreta come:
  $b_{-1}x\ 2^{-1} + b_{-2}x\ 2^{-2} + \ldots + b_{-m}x\ 2^{-m}$
- Esempi:
  - $0{,}101_2$ corrisponde al numero decimale:
    $1x2^{-1} + 0x2^{-2} + 1x2^{-3} =$
    $1/2 + 1/8 =$
    $0{,}5 + 0{,}125 = 0{,}625_{10}$
  - $0{,}1011_2$ corrisponde al numero decimale:
    $1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} =$
    $1 / 2 + 1 / 8 + 1 / 16 =$
    $0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 =$
    $0{,}6875_{10}$

Numeri frazionari: da decimale a binario

- Dato il numero F in base 10, si tratta di trovare la stringa $b_{-1}b_{-2}$ … b_{-m} tale per cui:
  $F = b_{-1}x\ 2^{-1} + b_{-2}x\ 2^{-2} + \ldots + b_{-m}x\ 2^{-m}$

- Osservando che b_{-1} è la parte intera del prodotto:
  $2xF = b_{-1} + b_{-2}x\ 2^{-1} + \ldots + b_{-m}x\ 2^{-(m-1)}$

  Si deduce che la **ricerca dei coefficienti b_i richiede un processo di successive moltiplicazioni della parte frazionaria con la parte intera.**

  Il processo termina solo quando la parte frazionaria risulta 0 oppure il numero è periodico.

Esempio di numeri frazionari in binario

- $0{,}78125_{10} \rightarrow$
  0,78125 x 2 = **1**,5625 → 1
  0,5625 x 2 = **1**,125 → 1
  0,125 x 2 = **0**,250 → 0
  0,25 x 2 = **0**,5 → 0
  0,5 x 2 = **1**,*0* → 1
  dunque: $0{,}78125_{10} = 0{,}11001_2$

- $19{,}6875_{dec} = 10011{,}1011$ in quanto
  $19_{dec} = 10011_2$ e $0{,}6875_{dec} = 0{,}1011_2$
  5 bit parte intera, 4 bit parte frazionaria

Osservazioni sulla virgola fissa

- Dato che la posizione delle virgola è stabilita a priori, addizione e sottrazione si svolgono come con i numeri interi (gli algoritmi sono sostanzialmente gli stessi).
- La virgola fissa è una rappresentazione semplice, ma poco flessibile, e può condurre a spreco di bit.
- Inoltre, per rappresentare numeri grandi oppure precisi occorrono molti bit.

Numeri in virgola mobile (1/2)

- Per rappresentarli si fa uso di rappresentazioni normalizzate aventi lo scopo di non doversi curare della posizione della virgola e del numero delle cifre utilizzate.
- Queste rappresentazioni vengono espresse come il prodotto di due fattori:
  - le cifre significative del numero,
  - una potenza del 10 il cui esponente definisce la posizione della virgola nel numero.
- Si usa spesso la rappresentazione in *virgola mobile* (*floating point*) anche in base 10, dove è chiamata *notazione scientifica*:

  $0{,}137 \times 10^{8}$ notazione scientifica vale $13.700.000_{dec}$

Numeri in virgola mobile (2/2)

- In generale una rappresentazione approssimata di un numero è data da:

$$\pm x_1 x_2 x_3 \ldots x_h , y_1 y_2 y_3 \ldots y_k \times B^{\pm a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Mantissa — Base — Esponente

- In binario, si utilizzano gli elementi seguenti:
  - un bit *s* per esprimere il segno
  - ***m*** ≥ 1 bit per la ***mantissa*** (numero naturale)
  - ***e'*** ≥ 1 bit per l'***esponente*** (numero intero)

  in totale dunque occorrono **1** + ***m*** + ***e'*** bit.

Rappresentazione esponenziale normalizzata

- *Convenzione*:
  la prima cifra significativa si trova immediatamente a destra della virgola.

- A tal fine basta aumentare o diminuire il valore dell'esponente di tante unità quante sono le posizioni di cui è stata spostata la virgola.

- Esempi: $127 \times 10^{6} = 0{,}127 \times 10^{9}$
  $15 \times 10^{-7} = 0{,}15 \times 10^{-5}$

Compattamento dalla rappresentazione

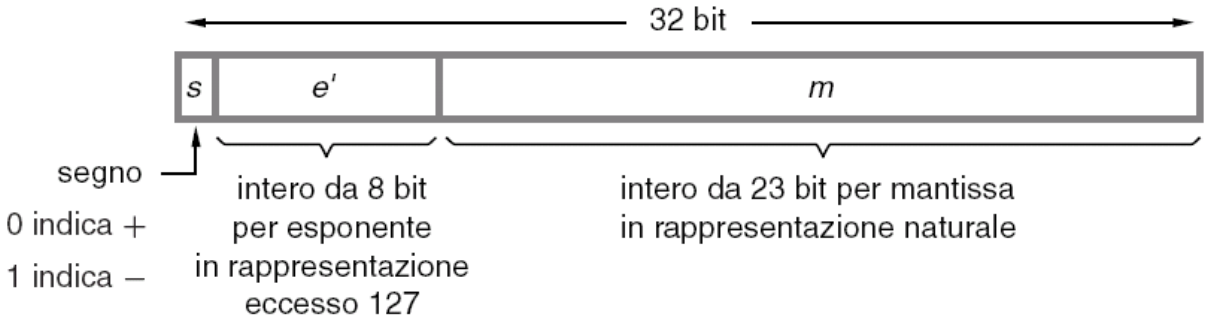
- *Eliminare*:
  - 0 iniziale
  - la virgola decimale
  - il segno di prodotto
  - il valore della base della potenza
- Lunghezza della mantissa costante
- Limitare gli esponenti ad un intervallo
- Polarizzare l'esponente
- Disporre segno,esponente e mantissa in un ordine stabilito.

Standard IEEE-754 (formato base, precisione singola)

- La mantissa è un numero la cui parte intera è sempre 1, ma il corrispondente bit è nascosto (la mantissa si compone solo della parte frazionaria).
- 1 bit di segno, 8 di esponente e 23 di mantissa.

Ampiezza parola	32
Ampiezza esponente	8
P (mantissa)	23
E_{max}	127
E_{min}	-126
Costante polarizzazione	127

Formato IEEE-754 singola precisione



- Il valore (frazionario) del numero rappresentato è:

$$\text{val}\left(se'm\right) = \pm f \times 2^e = \begin{cases} +1, m \times 2^{e'-127} & \text{se } s = 0 \\ -1, m \times 2^{e'-127} & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

$$\text{dove } f = 1, m \text{ ed } e = e' - 127$$

Esempi (1/3)

$e' = 32 + 8 = 40$

valore rappresentato $= \pm 1{,}001010 \ldots 0 \times 2^{40-127} = +1{,}001010 \ldots 0 \times 2^{-87}$

Esempi (2/3)

- $5_{10} = 101_2 = 1{,}01_2 \times (10^{10})_2$
  - il segno è positivo,
  - l'esponente vale (2_{10} + costante di polarizzazione)= 129_{10} cioè 10000001_2
  - la mantissa vale 01

dunque la rappresentazione e':

s esponente mantissa .....

0 10000001 01000000000000000000000

Esempi (3/3)

- $1284{,}91_{10}$=1010000 0100,1110100011110…$_2$ =
- 1, $0100000100111010001111 0_2 \times (10^{1010})_2$
  - il segno è positivo,
  - l'esponente vale (10_{10} + costante di polarizzazione)= 137_{10} cioè 10001001_2
  - la mantissa vale 01000001001110100011110

dunque la rappresentazione e':

s esponente mantissa ……..

0 10001001 01000001001110100011110

Osservazioni sulla rappresentazione in virgola mobile

- Il formato di virgola mobile permette di rappresentare efficacemente sia numeri estremamente grandi sia numeri vicinissimi a zero, con molte cifre frazionarie.
- In altre parole, esso combina estensione e precisione.
- Per questo motivo tale formato è di solito quello preferito nel calcolatore per rappresentare il numero frazionario.
- Ciò vale specialmente nei calcoli di tipo scientifico, dove spesso occorre avere sia estensione sia precisione.

Operazioni in virgola mobile

- Il formato di virgola mobile dispone di algoritmi abbastanza semplici ed efficienti per calcolare addizione, sottrazione e moltiplicazione, e altre operazioni ancora.
- Le operazioni in virgola mobile vengono ridotte a (poche) operazioni su numeri interi.
- Nel fare questo, ci sono numerosi aspetti importanti da definire: come arrotondare, se trattare o meno gli errori, e simili.

Operazioni in virgola mobile

- Addizione e sottrazione
  - Si rendono eguali gli esponenti mediante la traslazione a dx del numero con esponente minore (l'esponente del risultato è uguale all'esponente del più grande)
  - Addizione delle mantisse (e segno)
  - Eventuale normalizzazione
- Moltiplicazione
  - Somma esponenti e sottrazione costante di polarizzazione
  - Moltiplicazione delle mantisse (e segno)
  - Eventuale normalizzazione
- Divisione
  - Sottrazione esponenti e somma costante di polarizzazione
  - Moltiplicazione delle mantisse (e segno)
  - Eventuale normalizzazione

Precisione: bit di guardia

- I registri dei calcolatori moderni hanno dimensioni maggiori di quelle della mantissa
- **Bit di guardia**: sono i bit rimanenti del registro non presenti nella mantissa ed utilizzati nei passaggi intermedi dell'elaborazione (maggior precisione di calcolo).
- Il numero copiato in memoria viene arrotondato ed i bit di guardia vengono eliminati.

Precisione: Arrotondamento

- Standard IEEE 754-1985
  - Arrotondamento standard verso il valore più vicino

    Esempio:
    - $0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8$
    - Arrotond. → $0,b_1b_2b_3b_4$
    - Se è ≥ 1000_2 →si aggiunge 1 all'ultima cifra (b_4)
    - Se è < 1000_2 → si tronca .
  - Troncamento
    - ! polarizzazione verso lo zero
  - Arrotondamento per eccesso
  - Arrotondamento per difetto

Eccezioni

- Vengono segnalate dalla CPU al programmatore al fine di poterle gestire.
  - Underflow
  - Overflow
  - Divisione per zero
  - Eccezione per inesattezza
  - Eccezione per invalidità

Informazioni di carattere alfanumerico

- **Codifica ASCII**

  E' una forma di codifica alfanumerica, attualmente e' su 8 bit e consente di rappresentare tutti i caratteri alfabetici, maiuscoli e minuscoli, i numeri, i segni di punteggiatura, alcuni simboli matematici oltre ad alcuni *caratteri di controllo*.

  Esempio: 'A' = 41_{16} = 65_{10}, '9'=39_{16}=57_{10}

- **Codifica BCD** (*Binary Coded Decimal*)

  Viene usata per rappresentare le cifre binarie decimali su 4 bit.

  Esempio: 147_{10}=0001 0100 0111_{BCD}

Tabella ASCII standard

Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
0	00	NUL	32	20		64	40	@	96	60	‘
1	01	SOH	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	02	STX	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	03	ETX	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	04	EOT	36	24	$	68	44	D	100	64	d
5	05	ENQ	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	06	ACK	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	07	BEL	39	27	’	71	47	G	103	67	g
8	08	BS	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	09	TAB	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	LF	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	VT	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	FF	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	CR	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	SO	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	SI	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	DLE	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	DC1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	DC2	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	DC3	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	DC4	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	NAK	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	SYN	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	ETB	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	CAN	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	EM	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	SUB	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	ESC	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	FS	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	|
29	1D	GS	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	RS	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	US	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	DEL